Yeniden π

Levent Özbek
ozbek@science.ankara.edu.tr
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü

π sayısı, matematik bahçesinin en zarif çiçeklerinden birisidir. Archimedes'den beri yüzlerce yıldır, matematikçilerin ve diğer bilim insanlarının merak ve ilgiyle kokladıkları bir çiçek olagelmiştir. Bu sayının birçok özelliği vardır: Dairenin çevresinin çapına oranıdır ve transandant (aşkın) bir sayıdır (katsayıları tam sayı olan cebirsel bir denklemin çözümü olamayan sayı).

π'nin; geometri, olasılık, diferensiyel ve integral hesaplamalarda farklı bir biçimde kullanıldığını görmek, gerçekten de ilginçtir. Niye biri, bugün süper bilgisayarlarla yapıldığı gibi, π'nin değerini milyonlarca basamağa kadar hesaplamak istesin? π'nin ondalık basamaklarına karşı bu ilginin kaynağı nedir? Bu, süper bilgisayarların donanım ve yazılımlarının kapasitelerinin ölçülmesinde kullanılır. Hesaplama yöntemleri, yeni düşüncelerin ve kavramların ortaya çıkmasını sağlar. Gerçekten, π'nin bir düzeni, kalıbı yok mu? Sonsuz çeşitlilikte kalıplar mı içeriyor? π'nin içindeki bazı sayılarla daha sık mı karşılaşılıyor? Öyleyse bu sayılar tam da rasgele dağılmış değil mi acaba? Belki de matematikçilerin yüzyıllar boyunca π'ye duydukları ilgi ve hayranlık, dağcıları hep daha yükseklere tırmanmaya yönelten güçlü istek ve duygulara benzetilebilir.

Binlerce yıldır insanlar, π'nin daha çok ondalık basamağını hesaplamaya çalışmaktadır ve bu ondalık basamakların nasıl bir dağılım gösterdiği merak konusudur. π'ye duyulan bu ilgi nereden kaynaklanmaktadır? Acaba π'nin bugüne kadar bilinen özelliklerinden başka, keşfedilmeye hazır daha hangi özellikleri vardır?

Aslında tüm bu soruların yanıtı, henüz açık bir şekilde verilebilmiş değildir. Her gün π ile ilgili yeni bir yazı çıkmaktadır. İnsanın merak ve tutkusu sürdüğü sürece, π'de yeni bir estetik yön bulma arzusu sonsuza dek sürecek gibi görünmektedir.

Matematik literatüründe karşımıza çıkan ve matematikçiler tarafından estetik özelliğinden sıkça sözedilen "$e^{i\pi}+1=0$" eşitliği; matematiğin en önemli sabit sayıları olan $e, i, \pi, 1, ve\ 0$ sayılarını içermesi açısından da oldukça ilginçtir.

Matematik bahçesinin en zarif çiçeği orada durmakta ve belki de sonsuz özelliklerini sunmaya hazır bir sevgili gibi beklemektedir. Yazının devamında sorulan soruların bazılarının yanıtının neden zor olduğu ve insanlığın bugüne kadar bu çiçeği hangi yönlerden koklamaya çalıştıkları üzerinde durulacaktır.

1. Kısa Tarihçe

Hemen hemen tüm matematik kitaplarında, özellikle matematiği genelde bilime ilgi duyan kişilerin okuması için yazan kitaplarda, π ve onun özelliklerinden söz edilmeden geçilmemiştir [1]-[9].

Archimedes'ten sonra π sayısı üzerinde çok çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan ilki, π sayısının irrasyonel bir sayı olduğunun gösterilmesidir. Lindemann (1852-1939), 1882 yılında π sayısının transandant (aşkın) bir sayı olduğunu göstermiştir.

π'yi hesaplamak için kullanılan en ilginç yollardan birini, 18. yy'da Fransız doğa bilimci Buffon, İğne Problemi'nde kullanmıştır. Bir düzlem, araları d birim olan paralel çizgilerle ayrılmıştır. Uzunluğu d'den kısa olan bir iğne, bu çizgili yüzeye düşürülür. Eğer iğne bir çizginin üzerine düşerse, iyi atış olarak kabul edilir. Buffon'un şaşırtıcı buluşu; iyi atışların kötü atışlara oranının π'yi içeren bir açıklamasının olmasıydı. Eğer iğnenin uzunluğu d birimse, iyi atış olasılığı $2/\pi$' dir. 1901'de Lazzerini 3408 atış yaparak π'nin değerini 3.1415929 olarak hesapladı ki; bu altı ondalık basamağa kadar doğruydu. π'yi hesaplamak için başka bir olasılık yöntemi, 1904'de R.Charles tarafından bulundu. Buna göre; rasgele yazılan iki sayının göreceli asal olmalarının olasılığı $\frac{6}{\pi^2}$ dir.

π'nin hesabı için çok değişik yöntemler kullanılmakla birlikte, günümüzde yakınsak sonsuz seriler, çarpımlar ve ardışık yineleme bağıntıları kullanılmaktadır [18]-[22]. İnternet üzerinde π'ye açılan kapı olarak [22] nolu adresten yararlanılabilir.

2. π İçin Bazı Hesaplama Yöntemleri

π sayısını hesaplamak için çok değişik yöntemler kullanılmakla birlikte, bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir. Biraz programlama bilgisi olan birisi, bu yöntemleri kullanarak π' yi kolaylıkla hesaplatabilir.

Archimedes (ca250 BC)

$a_0 = 2\sqrt{3}$ ve $b_0 = 3$ başlangıç değerlerine bağlı olarak;

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ ve $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$ ardışık yineleme formulüyle hesaplanır.

Francois Viete (ca.1579)

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\dots$$

John Wallis (ca.1650)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7.9...}$$

Madhava, James Gregory,
Gottfried Wilhelm Leibnitz (1450-1671)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

Isaac Newton (ca 1666)

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}+24\left(\frac{1}{3.2^3}-\frac{1}{5.2^5}-\frac{1}{7.2^7}-\frac{1}{9.2^9}-\dots\right)$$

Leonard Euler (ca. 1748)

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\dots \rightarrow \frac{\pi^2}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\dots$$

Eugene Salamin, Richard Brent (1976)

$a_0=1, b_0=1/\sqrt{2}$ ve $s_0=1/2$ başlangıç değerlerine bağlı olarak $k=1,2,3,\dots$ için

$$a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2} \rightarrow b_k=\sqrt{a_{k-1}b_{k-1}} \rightarrow c_k=a_k^2-b_k^2 \rightarrow s_k=s_{k-1}-2^k c_k$$

olmak üzere; " $p_k=\dfrac{2a_k^2}{s_k}$ " bağıntısı ile hesaplanır.

Jonathan Borwein ve Peter Borwein (1991)

$a_0=1/3,\ s_0=(\sqrt{3}-1)/2$ başlangıç değerleri için

$$r_{k+1}=\frac{3}{1+2(1-s_k^3)^{1/3}} \rightarrow s_{k+1}=\frac{r_{k+1}-1}{2} \rightarrow a_{k+1}=r_{k+1}^2 a_k-3^k(r_{k+1}^2-1)$$

olmak üzere $1/a_k$, π 'ye yakınsar.

Jonathan Borwein ve Peter Borwein (1985)

$$\left(\frac{1}{10^5}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{n^2}{10^{10}}}\right)^2=\pi$$

Roy North (1989)

$$4\sum_{k=1}^{500,000}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=3.14159\underline{0}6535897932\underline{40}4626433832\underline{6}9502884197$$

burada sadece altı çizgili olan rakamlarda hata vardır.

David Bailey, Peter Borwein ve Simon Plouffe (1996)

$$\pi=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

3. Model, Rasgelelik, Simülasyon ve π Sayısı

π sayısının neden bu başlık altında incelendiği; "Model", "Rasgelelik" ve "Simülasyon" kavramlarından biraz bahsettikten sonra açıklık kazanacaktır.

Evrende olup bitenleri anlama ve anlatma çabası içinde olan insan; ilgilendiği olay ve süreçlerle ilgili çeşitli modeller kurar ve bu modeller üzerinde çalışarak, gelecekte ne gibi durumlar ortaya çıkabileceğini bilmeye çalışır. Model; gerçek dünyadaki bir sistemin yapı ve işleyişinin, ilgili olduğu bilim sahasının (fizik, kimya, biyoloji, jeoloji, astronomi, ekonomi, sosyoloji, ...) kavram ve kanunlarına bağlı olarak ifade edilmesidir. Model; gerçek dünyadaki bir olgunun bir anlatımıdır, bir temsilidir. Gerçek dünyanın çok karmaşık olması nedeniyle modeller, anlatmak istedikleri olgu ve sistemleri basitleştirerek onları belli varsayımlar altında ele almaktadır. Modeller gerçeğin kendileri değildir ve ne kadar karmaşık görünseler de gerçeğin bir eksik anlatımıdırlar. Kısaca model denilen şey, model kurucunun gerçeği "anlayışının" bir ürünüdür ve her model kurma işlemi bir soyutlama sürecidir.

Modeller değişik biçimlerde sınıflandırılmaktadır. Matematiksel modeller, anlatım gücü en fazla ve en geçerli olan modellerdir. Model kurucunun gerçek dünyadaki olguya bakış açısına bağlı olarak, modellemede farklı durumlar sözkonusu olabilir.

Newton'un Mekaniği ile doruk noktasına ulaşan Laplace anlamında belirlenimci dünya görüşü (determinizm-gerekircilik, saat gibi tıkır-tıkır işleyen evren modeli), kuantum fiziğinin gelişimi ile beraber yerini olasılıkçı dünya görüşüne bırakmak zorunda kalmıştır. Belirlenimci dünya görüşü (determinizm, belirlenmişlik) ve bununla ilişkili nedensellik ve rasgelelik kavramları; bilim, felsefe, sanat gibi alanlarda çok tartışılan konular arasında yer almaktadır [1]-[8].

Gerçek dünyayı anlama ve anlatmada, yani modellemede, insan aklının en güçlü iki aracı matematik ve istatistiktir. İstatistik; özellikle, rasgelelik içeren olguların modellenmesinde ön plana çıkmaktadır. Bu durumda, “Rasgelelik nedir?” sorusu önem taşımaktadır.

Pagels, "Rasgelelik nedir?" sorusuna cevap vermeye çalışırken, matematiksel ve fiziksel rasgelelik problemleri arasında ayrım yapmanın önemine değinmiştir ve “*Matematiksel problem, sayılar veya fonksiyonların rasgele sırasının ne anlama geldiğini tanımlayan bir mantıksal problemdir. Fiziksel rasgelelik problemi, gerçek fiziksel olayların rasgelelik konusundaki matematiksel kriterlere uyup uymadığını belirlemektir. Rasgeleliğin matematiksel bir tanımına sahip olana kadar, doğal olayların bir dizisinin gerçekten rasgele olup olmadığını belirleyemeyiz. Bir kere böyle bir tanımımız olunca, o zaman, gerçek olayların böyle bir tanıma karşılık gelip gelmediğini belirleme konulu ek deneysel bir problemimiz olur. Burada ilk problemle karşılaşırız: Matematikçiler, rasgeleliğin kesin bir tanımını verme ya da onunla bağlantılı bir iş olan olasılığı tanımlama işinde hiçbir zaman başarı sağlayamamıştır...*” demiştir.

Yine Pagels; π sayısının ondalık açılımındaki sayıların, rasgelelik testlerinden geçebileceğini veya bu sayıların çeşitli olasılık dağılımlarına uyabileceğini belirtmiştir. Dolayısıyla π’ye, bir de rasgelelik açısından bakılmasında yarar vardır.

Buffon'un İğne Problemi; π'nin bir geometrik olasılık probleminin çözümü sonucunda ortaya çıkması açısından özellikle ilginçtir. Bu deney herkes tarafından kolayca yapılabilir ve π için bir tahmin elde edilebilir. Olasılık ve istatistik kitaplarının hemen hepsinde, Buffon'un İğne Problemi’ne yer verilmiştir [10]-[14].

Yine π'yi tahmin etmek için, “ $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ” özelliği kullanılarak Monte Carlo İntegrasyonu olarak bilinen yöntem kullanılabilir. $U_1, U_2, \ldots, U_n$ rasgele değişkenleri $(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olmak üzere (hesap makinalarındaki RND tuşu, bilgisayarlardaki RND fonksiyonu veya rasgele rakamlar tablosu kullanılarak bu sayılar elde edilebilir)

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-U_i^2}$ toplamı ; $\frac{\pi}{4}$ için bir tahmin verecektir.

“Durup dururken nereden çıktı bu rasgele sayılar?” dediğinizi duyar gibi oluyorum. Model, rasgelelik, nedensellik gibi pek çok kavramdan sonra bir de “rasgele sayı”. Ekonometri, Sayısal Çözümleme, Şifreleme, Bilgisayar Programlama, Deneysel Fizik, İstatistik gibi birçok uygulamalı bilim alanında rasgele sayılar, simülasyon (benzetim) aşamasında kullanılmaktadır. “Artık gelelim şu bizim π'ye” diyorsanız, biraz daha sabır göstermenizi isteyeceğim. Kısaca simülasyon, model üzerinde deney yapmadır. Rasgelelik içeren olay ve süreçlerin, bilgisayar ortamında deneyinin yapılmasıdır. Bir olay, süreç veya sistemle ilgili bir özelliğin ya da davranışın model üzerinde gözlenmesine simülasyon (simulation) denir. "Simulation"; taklit, benzetim anlamına gelen bir sözcüktür.

Matematiksel modellerde, analitik veya sayısal bir çözüm bulunamadığında simülasyona başvurulduğunu ve optimal bir sonuç yerine, değişik koşullar altında yapılan denemelerle birtakım "gözlem" sonuçlarının elde edildiğini belirtelim. Modeller kurulduktan sonra, bu modellerden sonuç çıkarma yöntemlerinden veya başka bir ifadeyle çözüm yöntemlerinden biri olan simülasyon; analitik veya sayısal çözümler arasında en son başvurulması gereken bir çare olarak düşünülmesine karşılık, bilgisayar ve diğer teknolojik gelişmeler sonucunda çok kullanılan bir yöntem haline gelmiştir. Bununla birlikte, simülasyon ile elde edilen gözlemlerin gerçek dünyadakine göre ucuz, çabuk ve tekrarlanabilir şekilde elde edilmesi ve özellikle rasgelelik içeren modellerde çok değişik koşullar altında gözlem yapma olanağı vermesi, bazı durumlarda simülasyonu birinci sırada tercih edilen bir yöntem haline getirmektedir. Ancak, simülasyon sonucunda gerçek olay, süreç veya sistemle ilgili "model üzerinde yapılan deneyler" ile bazı gözlem değerlerinin elde edildiği unutulmamalıdır.

Simülasyon, eğitimde (pilot eğitimi, iş oyunları, savaş oyunları, rasgeleliğin kavratılması, ...) maliyeti düşük ve kullanışlı bir yöntemdir. Özellikle rasgele değişken içeren modellerdeki simülasyonda rasgeleliğin sağlanması (olasılık dağılımlarından rasgele sayı üretilmesi) ve simülasyon sonucunda elde edilen "gözlem" değerlerine bağlı sonuçların "iyiliği" sorunları, istatistiksel olarak çözülmesi gerekenlerden başlıca ikisidir. Olasılık dağılımlarından rasgele sayı üretilmesinin esası, düzgün dağılımdan sayı üretilmesine bağlıdır. Düzgün dağılıma sahip sayıların üretimi de, kendi başına bir araştırma konusudur. Son yıllarda, simülasyon, özellikle eğitim alanında kullanılan yöntemlerin başında gelmektedir. Simülasyonun temelinde de rasgele sayılar yatmaktadır. Yapılan simülasyon işleminin gerçek dünyadaki olayı iyi bir şekilde taklit edebilmesi istenir; eğer taklit iyi yapılamıyorsa, deney gerçek dünyadaki olayı iyi temsil edemeyecektir. Bu nedenlerle rasgele dizi kavramının uygulama açısından önemi büyüktür. İstatistiksel dağılımlardan örnek almak (model üzerinde deney yapma, bilgisayarda deney yapma, gözlem alma) için $(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenlerin çeşitli fonksiyonları kullanılır. Eğer $(0,1)$ aralığındaki düzgün dağılımdan rasgele sayı üretilemiyorsa doğaldır ki; diğer dağılımlardan da sayı üretmek mümkün olamamaktadır. Bunun için çeşitli üreteçler (fonsiyonel ilişki) kullanılmakta ve çeşitli istatistiksel özellikleri sağlayan üreteçler, rasgele sayı üreteçleri olarak kullanılmaktadır. Bu sayılar belirli kurallara göre üretildiklerinden, "sözde rasgele sayı" olarak bilinmektedir.

Hepimizin yakından bildiği bilgisayar oyunlarının da temeli bu rasgele sayılara bağlıdır. Tavla oyununda zar atışının bilgisayarda yapılabilmesi için, yine rasgele sayı üreteçlerinden yararlanılır. Bilgisayarda oynanan talih oyunlarında da rasgele sayı üreteçleri kullanılır. Bazı kişiler, bu rasgele sayı üreteçlerinin formulünü keşfederek bu oyunlarda hile yapmaktadır. Bununla ilgili son zamanlarda haklarında kanuni yaptırımlar uygulanan kişiler de bulunmaktadır. Kısaca bilgisayarda oyun oynayan ya da oyun programları yazanların, rasgele sayıları kullanmadan herhangi bir şey yapmaları olanaklı değildir.

Eğitimde de simülasyon; hem masrafsız hem de kolay olduğundan, bilgisayar destekli eğitim programları, son yıllarda kullandığımız programların başında gelmektedir. Bu programlar, öğrenenin, konuya ilgisini çekmek için hareketli görüntüler ve grafikler kullanılarak, aktif bir şekilde öğrenme sürecine girmesini sağlar. Bilindiği gibi kişinin konuya ilgi duyması, eğitim açısından çok önemlidir. Öğrenen; konunun temel kavramlarını tanıdıktan sonra, çeşitli modeller üzerinde programın elverdiği ölçüde girdilerini değiştirerek sonuçları bilgisayar ekranında görebilir. Biraz programlama bilgisi olan bir kişi, kendi simülasyonlarını kendisi de kolaylıkla yapabilir. Özellikle çeşitli araçların kullanımı ile ilgili eğitimde (Uçak, Gemi, Uzay araçları gibi); bu araçların hangi ortamda nasıl kullanılacağını ve kontrol edileceğini öğretmek amacıyla, kullanıcının gerçek durumda karşılaşabileceği farklı ortamlar hazırlanır ve kullanıcı bu durumlara göre davranış biçimleri ortaya koyar. Eğer kullanıcıya belirli, sabit, değişmeyen ortamlar oluşturulursa; belli bir süre sonra kullanıcı bunlara alışacağından, gerçeğin kendisinden uzaklaşmış olur. Bu nedenle kullanıcıya hep farklı durumlarla karşılaşabileceği ortamların, yani gerçek dünyada “rasgele” olarak karşısına çıkabilecek ortamların oluşturulması gerekir ki; bu da ancak rasgele sayıların kullanılmasıyla olur.

Günümüzde bilgisayar teknolojilerinin gelişmesi ile beraber, π'nin milyarlarca ondalık basamağı CD-ROM'lara kaydedilerek simulasyon çalışması yapanların kullanımına sunulmuştur. π sayısı, doğal rasgele sayı üreteci olarak adlandırılmıştır [15]-[17].

Kaynakça

[1]- S. Sertöz, *Matematiğin Aydınlık Dünyası*, Tübitak Yay.,1996.

[2]- M. Boll, *Matematik Tarihi*, İletişim Yay., 1991.
[3]- G. Gamov, 1-2-3 Sonsuz, Evrim Yay., 1995.
[4]- T. Pappas, *Yaşayan Matematik*, Sarmal Yay., 1993.
[5]- G. H. Hardy, *Bir matematikçinin Savunması*, Tübitak Yay., 1994.
[6]- J. P. King, *Matematik Sanatı*, Tübitak Yay., 1997.
[7]- A. Dönmez, Matematik Tarihi, V Yay., 1986.
[8]- H. R. Pagels, *Kozmik Kod, Doğanın Dili/Kuantum Fiziği*, Sarmal Yay., 1992.
[9]- A. Erdil, Aşkın Sayılar Üzerine, *Matematik Dünyası* Sayı 2, 1998.
[10]- B.J.T. Morgan, *Elements of Simulation*, Chapman and Hall, 1992
[11]- H.C. Tuckwell, *Elementary Applications of Probability Theory*, Chapman and Hall, 1998
[12]- F.Öztürk, *Matematiksel İstatistik*, A.Ü.F.F. Yay. No:10, 1993.
[13]- P. Bremaud, *An Introduction to Probabilistic Modeling*, Springer-Verlag, 1988
[14]- I. Deak, *Random Number Generators and Simulation*, Akademiai Kiado, Budapest 1990.
[15]- Y. Dodge, A Natural Random Number Generator, *International Statistical Review*, 1996, 329-344.
[16]- T. Jaditz, Are the Digits of π an Independent and Identically Distributed Sequence?, *The American Statistician*, Vol.54, No.1, 12-16, February 2000.

[17]- L. Özbek, Rasgele dizi ve π , *Matematik Dünyası*, 2000, Cilt9., Sayı 1, 26-28.
[18]- D.H. Bailey, J.M.Borwein and S.Ploufle, “The Quest for pi”, *The Mathematical Intelligencer*, June 1996.
[19]- L.J.Lange, An elegant Continued Fraction for π , *The American Mathematical Mountly*, May 1999, Vol.106, N.5, 456-458.
[20]- T.J. Osler, The Union of Vieta’s and Wallis’s Product for Pi, *The American Mathematical Mountly*, October 1999, Vol.106, N.8, 774-776.
[21]- P. Borwein, The amazing number π , September 2000, *NAW* 5/1, nr.3, 42-46.
[22]- P.Borwein, Ocak 2001, Kişisel web sayfası (internette π ’ye açılan kapı), http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein.